

# METODA DE PROPAGARE A UNDELOR CINEMATICE PE BANDĂ ȘI COMPUNEREA UNDELEOR DE PE BENZI PE FIRELE DE VALE MODELUL BANDA

Apostol Adrian – C.N.P.H – I.N.H.G.A București – România  
hadrianus150ac@yahoo.com,

## INTEGRATION FLOW ON SLOPES WITH DRAINAGE STRIP METHOD

**Abstract.** Assumptions of this method are based on 2 principles, the principle of continuity and 2nd principle of Newtonian Mechanics applied in conditions of fluid flow at open level in a very wide channel, more precise, propagation of Saint-Venant system of equations by finite difference method in wide channels. Method aims at Kinematic waves propagation, one-dimensional, imposing the condition of hard incompressible fluid and considering that the side consists of rectangular channels with varying widths where the continuity equation and the equation of motion, transformed into specific discharge equation on unit channel width, is valid, equations in which the hydraulic radius is estimated to layer tape leaked, valid condition because the band width is much larger than the layer leaked. These rectangular channels are chosen so that the work done by water dripping blade to sweep the water to wire valley to be minimum, but also that whatever the rectangular channel, flow must be perpendicular to the contour lines. Another condition for the band width is given by the fact that the motion is quasi-permanent, which means that fluid movement is to proceed without velocity fluctuations, which is translated by the uniform band slope. It is wanted, as much as possible, to choose bands so that the distance between contour lines to be constant over the entire band. By the aforementioned method aims to follow as closely as topographic features of slope. Each valley thread is considered as a creek, and bands which discharge into this thread are considered small tributaries of the creek. Composition waves from the wire strip valley is made by algebraic summing dephase, taking into account hydrographs levels or discharges obtained the discharge point of each strip, point considered at the middle of the strip, this summing ending at the hydrographic basin closure section, on which we apply this method.

**Keyword :** fluid flow, hydrographic basin, hydrographs levels.

---

## 1. Aspecte generale privind problematica scurgerii pe versanți

Într-o primă aproximare, după o observație grosieră se ajunge la concluzia că apa se scurge pe versant sau în cuprinsul unui bazin hidrografic sub forma unei lame subțiri, continue, omogene care are un gradient de creștere sau descreștere gradual în timp în funcție de caracteristicile ploii căzute și depinde intrinsec de suportul pe care se desfășoară scurgerea.

Cantitativ și calitativ acumularea de apă de pe suprafața unui versant sau a unui bazin hidrografic este percepută într-un sector de râu colector, unde delimitând o secțiune căreia îi cuantificăm caracteristicile prin parametrii mășurați, ca un hidrograf care poate da informație despre scurgerea lichidă sau în contextul transportului solid despre scurgerea solidă.

Tot prin observație se constată că începerea ploii nu are ca rezultat simultan creșterea debitului sau nivelului într-o secțiune de închidere a unui bazin hidrografic ci se constată un interval de timp până începe creșterea propriuzisă în râu.

De timpul de concentrare pe versant se leagă condițiile de scurgere, parametrii hidraulici de care depinde viteza de scurgere pe versant se cuantifică indirect în acest timp de concentrare, dar mai există o componentă de viteză dată de cracteristicile de infiltrație ale solului care are ca efect reducerea cantității de ploaie căzute pe versant.

Printr-o abordare mai simplistă a modelelor cibernetice și a viziunii într-un spectru ecologic putem spune că intrările într-un sistem hidrologic pot fi asemuite unor stimuli, dispozitivul receptor fiind suprafața versantului, comanda – energia de pantă, dispozitivul efector – energia cinetică a apei, iar răspunsul hidrograful în secțiunea de închidere a bazinului hidrografic.

În formă restrânsă sistemul hidrologic este reprezentat de o cutie neagră în care ieșirile sunt evaluate în funcție de intrări, stabilindu-se un feed-back ce controlează transferul de cantitate de masă, sau matematic feed-backul reprezintă cuantificarea variabilității parametrice la stări diferite ale sistemului.

Feed-backul între ieșiri și intrări se transformă în timp în informație redundantă, această informație se cuantifică, grupează și reprezintă în modelare elementul dimensionării parametrice cantitativ și calitativ, cantitatea redundantă mediată pe stări echivalente ale sistemului reprezintă amplificatorul unei funcționalități matematice sau este un amplificator al unui semnal.

Modelele statistico-stohastice au avantajul rapidității, dar presupun un volum foarte mare de date, iar modelarea trebuie să se facă cu respectarea acurateții evenimentelor încât combinațiile corelative și distribuțiile teoretice să fie cât mai apropiate de legile fizice ce guvernează fenomenul real.

Scurgerea pe versant prezintă o mare variabilitate spațio-temporală și un puternic caracter de nepermanență, acțiunea ei în timp îndelungat determină redundanță în sistem prin feed-backuri pozitive sau negative în funcție de acțiunea constructivă sau distructivă, naturală sau antropică.

Feed-backurile negative antropice ce dau redundanță distructivă în sistemul hidrologic țin de nerespectarea unor reguli minimale pentru contracararea scurgerii pe versant, reguli ce țin de agricultură, silvicultură și pășunat.

Arăturile făcute din deal în vale (perpendicular pe curbele de nivel), nerespectarea criteriilor de densitate a livezilor respectiv pădurilor, pășunatul excesiv și haotic au concurat în timp la amplificarea microrețelei de scurgere pe versant, ducând la mărirea densității acesteia, la creșterea ravenelor și torenților prin amplificarea fenomenului de eroziune hidrică și eoliană.

În concluzie, gestionarea haotică a pădurilor, și exploatarea lor după regului ce nu respectă echilibrul ecologic și ciclul normal de formare și dezvoltare au ca efect hidrologic înregistrarea vârfulor de viitură într-un timp foarte scurt, câteva ore, ducând la debite foarte mari în secțiunile de închidere ale bazinului hidrografic.

Redundanța prin feed-back negativ este cheia în efectele devastatoare a inundațiilor de versant, acest lucru se traduce prin amplificarea și fortificarea formațiunilor de scurgere, favorizându-se efectul distructiv al energiei versantului și anume se transformă cu un randament foarte mare energia potențială a versantului în energie cinetică și implicit în lucru mecanic cu o forță mai mare de dislocare a particulelor de sol, o viteză mai mare de scurgere, timpi de concentrare mai mici, deci viituri de durată mai mică cu vârfuluri mari și datorită fluidului vehiculat, cu o densitate mai mare, au și un grad de distrugere mai mare.

## 2. Fundamentarea fizică a modelului BANDA

La fundamentarea acestui model se pleacă de la două concepte ale modelării scurgerii fluidului, de la noțiunea de continuitate a mișcării și noțiunea de conservare a cantității de mișcare, mergând pe acest fir ne propunem să găsim ecuațiile care guvernează mișcarea apei în canalele foarte late.

Ca să aplicăm conceptual continuității considerăm ca la un timp  $t$  masa unui fluid în mișcare ocupă un volum  $\Omega$ , iar la momentul  $t + dt$  volumul ocupat de masa fluidă va fi  $\Omega^*$ . Pentru ca să se îndeplinească condiția de continuitate trebuie ca masa fluidului conținută în volumul  $\Omega$  să fie aceeași cu masa fluidului conținută în volumul  $\Omega^*$ .

În altă ordine de idei considerăm doi vectori unul care caracterizează o particulă de fluid aflată la timpul  $t$  în volumul  $\Omega$  și alt vector care surprinde aceeași particulă fluidă după un timp  $t + dt$  în volumul  $\Omega^*$ , atunci deplasarea acestei particule va avea următoarea ecuație:

$$(2.1) \quad \vec{r}^* = \vec{r} + \vec{v} dt$$

Dacă extrapolăm această mișcare asupra elementului de fluid, atunci oricare direcție vectorială din volumele de control  $\Omega$  și  $\Omega^*$  va respecta ecuația (2.1), ceea ce în sens vectorial și proiectat pe axele unui trihedru ortogonal drept va da naștere următoarei interpretări matematice a evoluției masei specifice într-un interval de timp  $dt$ :

(2.2)  $\rho^* = \rho[x + u dt, y + v dt, z + w dt, t + dt]$ , unde  $u, v, w$  sunt proiecții ale vitezei particulei pe axele reperului fix ortogonal. Din punct de vedere fizicomatematic ecuația (2) are următoarea dezvoltare în sens Taylor:

$$(2.3) \quad \rho^* = \rho[x, y, z, t] + \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dt + \dots$$

Aplicând principiul că la orice variație elementară de timp masa fluidului să se conserve atunci înseamnă că variația funcțională a masei specifice trebuie să fie unitară, ceea ce înseamnă că raportul jacobienilor formelor liniare ale masei specifice la momentul  $t$  și  $t + dt$  să fie unitar, ceea ce este echivalent cu ecuația:

$$(2.4) \quad \frac{D[x^*, y^*, z^*]}{D[x, y, z]} = 1, \text{ ținând cont de dezvoltarea acestui raport în serie Taylor până la termenii de}$$

ordinul unu și de forma ecuației (2.3) va rezulta ecuația de continuitate a fluidului real sub forma:

$$(2.5) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}[\vec{v}] = 0$$

Ecuația (5) are valabilitate numai dacă sistemul scurgere pe versant ar fi închis, practic, la nivel de scurgere de suprafață, variația internă a masei se produce ca efect al afluzului de masă ce intră în acest sistem. În aceste condiții ecuația (5) nu poate avea valoarea zero ci trebuie să fie egală cu afluzul de masă ce intră în sistem, acest afluz fiind dat de diferența între stratul căzut de apă și stratul infiltrat, afluz ce se traduce prin strat disponibil pentru scurgere (SDS), în aceste condiții ecuația (2.5) devine:

$$(2.5'') \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}[\vec{v}] = SDS$$

În continuare studiem mișcarea cvasipermanentă a unui fluid greu, mișcare pe care o considerăm uniformă, adică domeniul ocupat de fluid are forma cilindrică sau prismatică.

Definim următoarele noțiuni:

- Secțiune vie, adică porțiunea din secțiunea dreaptă efectiv ocupată de fluidul greu, această secțiune nu variază în lungul direcției de mișcare
- Perimetru ud, este porțiunea de frontieră a secțiunii vie care este udată de fluid
- Raza hidraulică definită ca raportul dintre aria secțiunii vie și lungimea perimetrului ud.

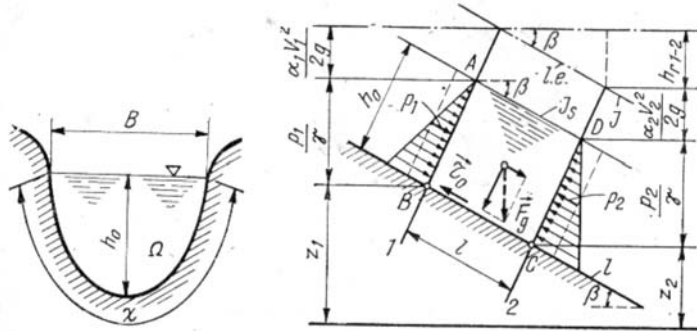


Fig. 1 Parametrii variabili ai modelului S – suprafața benzii ( $m^2$ ),  $h$  - adâncimea apei pe versant (mm),  $R$  – lungimea benzii (m),  $b$  – lățimea benzii (m), etc.

Considerăm două secțiuni drepte 1 și 2 iar  $v_1$ ,  $v_2$  și  $p_1$ ,  $p_2$ , vitezele respectiv presiunile medii pe aceste secțiuni. Scriem ecuațiile lui Bernoulli în aceste secțiuni pentru punctele B și C. Prin urmare panta  $i$  a fundului albiei va fi data de: (2.6)  $i = \sin \beta$ , iar panta suprafeței libere și panta hidraulică se consideră a fie egale cu panta terenului în Fig.1.

Scriem condiția de echilibru dinamic a masei de fluid delimitată de cele două secțiuni și obținem:

(2.7)  $p_1 A_\Omega - p_2 A_\Omega + \rho g A_\Omega l \sin \beta - \tau_0 l_\chi l = 0$ , unde  $\tau_0$  reprezintă valoarea medie a eforturilor unitare tangențiale dezvoltate pe suprafața de contact dintre fluid și frontieră umedă a secțiunii vie. Se consideră presiunile hidrostatice în cele două secțiuni egale și se anulează, iar pentru efortul de frecare avem relația:

$$(2.8) \tau_0 = \rho g \frac{A_\Omega}{l_\chi} \sin \beta$$

În altă ordine de idei se poate presupune că valoarea forței care se opune mișcării fluidului datorate eforturilor de frecare depinde de aria suprafeței de contact  $A = l_\chi l$ , rugozitatea peretelui, densitatea fluidului, vâscozitatea sa dinamică și forma secțiunii vie. Observăm că forța de rezistență pe frontiera umedă a secțiunii vie are următoarea dependență funcțională:

(2.9)  $R = R[A, k, \nu, \rho, \eta, D_h]$ , și aplicând teorema Rayleigh din analiza dimensională obținem:

$$(2.10) R = \rho v^2 A \left[ \text{Re}, \frac{k}{D_h} \right], \text{ deci valoarea medie a efortului unitar tangențial de pe suprafața de}$$

contact dintre fluid și frontiera suprafeței vie are forma:

$$(2.11) \tau_0 = \frac{R}{A} = \frac{\rho v^2}{8} \lambda \left[ \text{Re}, \frac{k}{D_h} \right]$$

Din relațiile (2.8) și (2.11) rezultă: (2.12)  $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{2 g D_h \sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{2 g D_h J}$ , deoarece  $\sin \beta =$

$I$ , iar  $I = J$  și punând  $D_h = 4R_h$  și  $\lambda = \frac{8g}{C^2}$ , în aceste condiții se obține:

$$(2.13) v = C \sqrt{R_h J}$$

Pentru calculul lui  $C$  se aplică formule empirice, iar pentru simplitate este utilă formula lui Maning

(2.14)  $C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}$ , dacă se ține seama de formula lui Pavlovski și de cele spuse anterior se observă că debitul

specific pe o lățime unitară de canal este direct proporțional cu un modul de debit de forma  $\alpha = \frac{\sqrt{I_0}}{n}$  și exponențială razei hidraulice, exponentul fiind calculat în funcție de parametrii geometrici ai canalului considerat.

### 3. Modelul de integrare a scurgerii pe versant BANDA

Din cele studiate anterior propunem un model de propagare al undelor cinematice unidimensional impunând condiția de fluid greu incompresibil, considerând că versantul este format din canale dreptunghiulare de lățimi variabile unde este valabilă ecuația de continuitate (2.5'') și ecuația de mișcare (13) transformată în ecuație a debitului specific pe unitatea de lățime a canalului, ecuații în care raza hidraulică se aproximează cu stratul scurs pe bandă. Această condiție are valabilitate din faptul că lățimea benzii este mult mai mare decât stratul scurs.

O altă condiție pentru lățimea benzii este dată de faptul că mișcarea este cvasipermanentă, adică mișcarea fluidului să decurgă fără fluctuații de viteză, ceea ce se traduce prin panta uniformă a benzii. Se caută pe cât posibil alegerea benzilor astfel încât distanța dintre curbele de nivel să fie constantă pe întreaga bandă.

Modelul propus are ca premise urmărirea cât mai fidelă a topografiei și a scurgerii de la cumpenele de apă către firele de vale.

Fiecare fir de vale este considerat ca un pârâu, benzile care deversează în acest fir sunt considerate ca mici afluenți, iar compunerea undelor provenite din benzi pe firul de vale se face prin însumare algebrică defazată, luându-se în considerare hidrografele de niveluri sau debite obținute în punctul de descărcare al fiecărei benzi, punct considerat la mijlocul benzii.

Acest model de prognoză își propune ca rezultat în secțiunea de închidere a unui bazin hidrografic, hidrograful scurgerii ce s-ar putea produce în urma unei ploii de o anumită intensitate și durată.

#### 3.1. Date de intrare necesare modelului

Bazinul hidrografic pentru care s-a aplicat modelul a fost împărțit în 19 benzi, alese în sensul de curgere al terenului, de la punctul de cumpană a apei până la descărcarea benzii către firul de apă.

Pe fiecare bandă  $b_i$  de lungime  $R$ , s-au stabilit pantele pentru intervalul de lungime impus de discretizarea sistemului cu derivate parțiale, lungimea, lățimea, suprafața benzii și timpul de concentrare pe aceasta.

Pentru calculul funcției de strat disponibil pentru scurgere s-a recurs la următorul raționament:

La fiecare viitură din baza de date la care am avut pluviogramă, am scăzut stratul scurs rezultat din tăierea hidrografelor corespunzătoare, astfel obținând seturi de date ce reprezintă stratul disponibil pentru scurgere corespunzător viiturii respective. După efectuarea acestui pas, cu șirurile obținute am făcut distribuții de medie zero și abatere medie pătratică unu și s-a observat că aceste distribuții au forma unor sinusoidale, în acest mod ajungând la concluzia că este utilă o distribuție de tipul:  $y = A \sin Bt$ , cu coeficienții

$A = \frac{1}{2}$  ;  $B = \frac{\pi}{D_{\max}}$ , unde  $D_{\max}$  este durata ploii, această distribuție înmulțindu-se cu precipitația totală căzută.

Rezolvarea ecuațiilor modelului cu derivate parțiale se face printr-o schemă cu diferențe finite după cum urmează:

#### 3.2. Discretizarea ecuației cu derivate parțiale în diferențe finite

Modelul propus rezolvă ecuația continuității scurgerii fluidului și cea de mișcare prin metoda

diferențelor finite. (3.2.1) 
$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial r} = SDS \\ q = \alpha h^m \end{cases}$$

Rezolvarea acestui sistem se face printr-o schemă cu diferențe finite după cum urmează:

- ✓ pentru derivata parțială spațială folosim aproximația derivatei cu diferențe înapoi (upstream)
- ✓ pentru derivata temporală aproximația prin diferențe înainte (downstream)

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{\Delta r} \end{cases}$$

Dacă cunoaştem datele lui  $h$  la nivelul de timp  $n$  împreună cu condițiile pe frontieră, atunci estimarea lui  $h$  se poate face pentru următorul pas de timp  $(n + 1)$ .

Pentru ca sistemul (1) să aibă o exprimare numai în variabilă  $h$  atunci este necesară următoarea prelucrare:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\alpha h^m) = \alpha m h^{m-1} \frac{\partial h}{\partial r} \quad \text{și va rezulta următoarea ecuație cu derivate parțiale:}$$

$$(3.2.3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha m h^{m-1} \frac{\partial h}{\partial r} = SDS, \quad \text{deci ecuația diferențială (3) va avea următoarea formă în diferențe}$$

finite:

$$(3.2.4) \quad \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} = i - f - \alpha m (h_j^n)^{m-1} \frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{\Delta r}, \quad \text{iar prin prelucrări algebrice simple va căpăta forma:}$$

$$(3.2.5) \quad h_j^{n+1} = h_j^n + (SDS)_n - \alpha m (h_j^n)^{m-1} \frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{\Delta r}$$

Convergența o vom stabili pentru o ecuație mai simplă, ecuație ce va avea forma:

$$(3.2.6) \quad h_j^{n+1} = h_j^n - \beta \frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{\Delta r}, \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \beta = \frac{u_0 \Delta t}{\Delta r} \\ u_0 = \alpha m (\bar{h})^{m-1} \end{cases}$$

Fracția  $\beta$  se numește numărul C.F.L (după Courant, Friedrichs și Levi) și este utilizat în evaluarea stabilității, iar pentru evaluarea stabilității folosim teorema Lax-Richtmeyer, teoremă ce are următorul enunț:

Dacă o schemă cu diferențe finite este consistentă și stabilă atunci ea este convergentă.

#### Stabilitatea

O schemă cu diferențe finite este stabilă dacă diferența între soluția exactă și soluția numerică nu crește exponențial cu creșterea nivelului de timp.

#### Consistența

O schema cu diferențe finite este consistentă cu o ecuație cu derivate parțiale dacă eroarea de trunchiere a ecuației cu diferențe finite tinde la zero când pasul de spațiu și timp tinde către zero.

Dacă presupunem  $h_j^n$  soluția adevărată a ecuației (3.2.7)  $\frac{\partial h}{\partial t} = u(h)$  în punctul  $x_j$  și timpul  $t_n$ , soluția

fiind înlocuită în ecuația cu diferențe finite și dezvoltările în serie Taylor utilizate pentru a exprima totul în funcție de comportarea lui  $\bar{h}$  la poziția  $x_j$  și timpul  $t_n$ .

Rearanjând ecuația rezultă:

$$(3.2.8) \quad \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_j^n = U(h)|_j^n + E$$

Dacă eroarea de trunchiere  $E$  tinde la zero când pasul de grilă și timp tind la zero, schema este consistentă.

Condițiile la limită:

$$h(0, t) = h(t)$$

Considerăm soluția analitică a ecuației:

$$(3.2.9) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad \text{ca fiind de forma} \quad h(r, t) = f(r - u_0 t), \quad \text{ceea ce înseamnă că perturbația inițială}$$

se translatează în lungul direcției de curgere.

Considerăm că energia perturbației este definită prin:

(3.2.10)  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^R h^2 dr$  Dacă înmulțim ecuația (9) cu  $h$  și integrăm în raport cu  $r$  atunci avem:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{u_0}{2} \int_0^R \frac{\partial h^2}{\partial r} dr = \frac{u_0}{2} (h^2)_0^R = 0, \text{ deci energia este conservabilă în timp.}$$

Reprezentăm derivatele în funcție de valorile lui  $h$  în punctele de grilă  $R_j$  la nivelele de timp  $t_n$ , unde  $R_j = (j-1)\Delta x$ ;  $j = \overline{1, N+1}$ , unde  $\Delta r = \frac{R}{N}$ ;  $t_n = n\Delta t$ .

Pentru stabilitatea schemei luăm în considerare comportarea erorilor inițiale și examinăm dacă acestea cresc exponențial, acest lucru putând fi verificat prin metoda seriilor Fourier:

Considerăm (3.2.11)  $h(r,0) = g(r) = C_k e^{ikr}$ ,  $k = \frac{2\pi\mu}{r}$ , unde  $\mu$  este un număr de undă.

Soluția analitică a ecuației este de forma: (3.2.12)  $h(r,t) = C_k e^{ik(r-u_0t)}$ , iar ecuația (3.2.6) are condiția la limită de forma (3.2.13)  $h_j^0 = C_k e^{ikr_j}$ , iar soluția ecuației este dată de (3.2.14)  $h_j^n = (\lambda_k)^n C_k e^{ikr_j}$ , unde  $\lambda_k$  este o cantitate complexă ce depinde de schema cu diferențe finite și numărul de undă  $k$ .

Considerăm (3.2.15)  $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\theta}$  și atunci rezultă (3.2.16)  $h_j^n = |\lambda_k|^n e^{ik\left(r_j + \frac{n\theta}{k}\right)}$  și atunci  $|\lambda_k|$  dă partea de schimbare a amplitudinii pe pasul de timp și  $\theta$  dă informații despre fază.

Dacă comparăm (3.2.18) cu (3.2.14) se pot pune în evidență următoarele:

- I. Stabilitatea schemei cu diferențe finite ce este asigurată impunând condiția  $|\lambda_k| \leq 1$  pentru toți  $k$ .
- II. Schema cu diferențe finite introduce o aplatizare fictivă  $D = |\lambda_k|$  la fiecare pas de timp  $t$ , dacă  $D = 1$  schema este neutră.
- III. Viteza de fază a soluției numerice este  $c = -\frac{\theta}{k\Delta t}$  și este diferită de  $u_0$ , iar o măsură convenabilă pentru eroarea de fază este viteza de fază relativă  $c^* = \frac{c}{u_0}$ .
- IV. Viteza perturbației depinde de numărul de undă și induce o dispersie de calcul, ceea ce înseamnă că perturbația care are mai multe componente Fourier nu își menține forma, traducându-se prin faptul că viteza de grup nu este identică cu viteza de fază.

Pentru ecuații diferențiale cu coeficienți constanți criteriul (I) de stabilitate este prea tare, deoarece sunt posibile creșteri exponențiale ale soluțiilor realiste fizice și prin urmare, criteriul de stabilitate poate fi scris sub forma  $|\lambda_k| \leq 1 + O(\Delta t)$ , ceea ce permite o creștere exponențială a soluției mai lentă. Dacă soluția adevărată nu crește atunci este necesar să asigurăm criteriul  $|\lambda_k| \leq 1$ .

Dacă revenim la ecuația (6) și substituim conform relației (16) conduce la următoarea evaluare:

(3.2.17)  $\lambda_k = 1 - \beta(1 - \cos k\Delta r + i \sin k\Delta r)$  și utilizând faptul că  $\lambda_k$  este complex, atunci:

$$(3.2.18) \quad (\lambda_k)^2 = 1 + 2\beta(\beta - 1)(1 - \cos k\Delta x)$$

Întrucât  $(1 - \cos k\Delta r) \geq 0$ , criteriul de stabilitate  $|\lambda_k| \leq 1$  este satisfăcut dacă și numai dacă

$\beta(\beta - 1) \leq 0$  ceea ce conduce la  $u_0 \geq 0$  și  $\frac{u_0 \Delta t}{\Delta r} \leq 1$ , rezultat asemănător cu cel în cazul energiei.

Pentru studiul aplatizării amplitudinii și a erorilor de fază este convenabil să punem în evidență lungimile de undă de  $R$  și pașii de grilă.

Pentru numărul de undă  $k = \frac{2\pi}{R\Delta r}$  se poate arăta că aplatizarea pe pasul de timp (D) și eroarea relativă de

fază  $\epsilon$  au expresiile:

$$(3.2.19) \quad D = \sqrt{1 + 2\beta(\beta - 1)(1 - \cos k\Delta r)}$$

$$(3.2.20) \quad \varepsilon = \frac{1}{\beta k \Delta r} \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin k \Delta r}{\beta(1 - \cos k \Delta r) - 1}$$

Pentru exemplificarea modelului numeric de propagare a undei de viitură pe bandă, prezentăm rezultatele obținute sub formă tabelară și grafică pe două benzi alese aleator, în cazul nostru banda 4 și banda 14.

Reprezentarea grafică se face în funcție de timp și strat scurs, fiecare undă în parte reprezentând propagarea la intervalul de timp  $n^* \Delta t$ , iar tabelele au forma unor matrici, unde pe primul rând este pasul de timp, iar pe prima coloană pașii de spațiu.

### 3.3. Compunerea hidrografelor obținute pe benzi

Unda de viitură în punctul de închidere al bazinului se obține prin defazarea de timp dată de distanța între punctele unde se consideră că benzile se descarcă în firul principal de apă și apoi aceste hidrografe defazate se însumează algebric. Pentru însumarea algebrică a hidrografelor pe benzi obținute prin metoda diferențelor finite se caută o funcție algebrică în variabila timp astfel încât aproximația cu hidrograful dat de metoda cu diferențe finite să fie cât mai exactă.

Din prelucrarea hidrografelor pe benzi s-a ajuns la aproximarea hidrografelor cu polinoame de grad 5 sau 6, aproximare ce se face prin metoda celor mai mici pătrate.

Raționamentul teoretic care stă la baza acestei aproximări este următorul:

- ✓ Avem ca bază de intrare hidrograful de bandă ca o funcție de timp
- ✓ Se face cinci șiruri de valori fictive, șiruri ce reprezintă variabilele unei regresii, dar și în același timp dă și exponenții polinomului care aproximează hidrograful:

$$\text{Definim șirurile: (3.3.1) } \begin{cases} \xi_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \xi_2 = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n\} \\ \vdots \\ \xi_5 = \{x_1^5, x_2^5, \dots, x_n^5\} \\ \eta = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \end{cases}, \text{ apoi cu aceste șiruri următorul șir}$$

$$(3.3.2) \quad \eta_t = a_n \xi_n + a_{n-1} \xi_{n-1} + \dots + a_1 \xi_1 + a_0, \text{ dacă din } \eta_t \text{ scădem } \eta \text{ și formăm operatorul de mediere (3.3.3)}$$

$E(\eta - \eta_t)^2$ , atunci pentru a fi îndeplinită condiția celor mai mici pătrate trebuie ca operatorul (3.3.3) să fie minim și ca această condiție să fie îndeplinită trebuie ca derivatele parțiale în funcție de coeficienții șirului  $\eta_t$  să se anuleze. Impunând această condiție rezultă:

$$\frac{\partial E(\eta_t - \eta)}{\partial a_i} = E \left[ \frac{\partial}{\partial a_i} (\eta_t - \eta)^2 \right] = E \left[ 2(\eta_t - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial a_i} \right], \text{ deci:}$$

$$E \left[ 2(\eta_t - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial a_i} \right] = 0 \Rightarrow E \left[ 2\eta_t \frac{\partial \eta}{\partial a_i} - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial a_i} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$(3.3.4) \quad E \left( \eta_t \frac{\partial \eta_t}{\partial a_i} \right) = E \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial a_i} \right) \Rightarrow \text{ sistemul operațional:}$$

$$(3.3.5) \quad \begin{cases} E[a_n \xi_n + a_{n-1} \xi_{n-1} + \dots + a_1 \xi_1 + a_0] = E[\eta] \\ E[a_n \xi_n \xi_1 + a_{n-1} \xi_{n-1} \xi_1 + \dots + a_1 \xi_1^2 + a_0 \xi_1] = E[\eta \xi_1] \\ \vdots \\ E[a_n \xi_n^2 + a_{n-1} \xi_{n-1} \xi_n + \dots + a_1 \xi_1 \xi_n + a_0 \xi_n] = E[\eta] \end{cases}, \text{ rezultă următorul sistem liniar:}$$

$$(3.3.6) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 E(\xi_1) + a_2 E(\xi_2) + \dots + a_n E(\xi_n) = E(\eta) \\ a_0 E(\xi_1) + a_1 E(\xi_1^2) + a_2 E(\xi_2 \xi_1) + \dots + a_n E(\xi_n \xi_1) = E(\eta \xi_1) \\ \vdots \\ a_0 E(\xi_n) + a_1 E(\xi_1 \xi_n) + a_2 E(\xi_2 \xi_n) + \dots + a_n E(\xi_n^2) = E(\eta \xi_n) \end{cases}, \text{ matricial, acest}$$

sistem va avea următoarea formă:

$$(3.3.7) \quad \begin{pmatrix} 1 & E(\xi_1) & E(\xi_2) & \dots & E(\xi_n) \\ E(\xi_1) & E(\xi_1^2) & E(\xi_1 \xi_2) & \dots & E(\xi_1 \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(\xi_n) & E(\xi_1 \xi_n) & E(\xi_2 \xi_n) & \dots & E(\xi_n^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \\ = (E(\eta) \quad E(\eta \xi_1) \quad E(\eta \xi_2) \quad \dots \quad E(\eta \xi_n))$$

Rezolvarea sistemului (27) ne duce la aflarea coeficienților unui polinom de grad n dat de ecuația: (3.3.8)  $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Pentru ca aproximația polinomului (28) să fie cât mai exactă, se caută acel coeficient de corelație cât mai apropiat de 1, dar să fie și cel maxim indiferent de gradul polinomului ales.

În cazul nostru s-a constatat că polinoamele care satisfac criteriile de mai sus, în cazul hidrografelor pe benzi, sunt polinoame de grad 5, al căror coeficient de corelație în raport cu șirul de date ce reprezintă stratul scurs de apă pe benzi nu este mai mic decât valoarea 0,99.

Pentru calculul coeficientului de corelație s-a folosit formula:

$$\rho(\eta_t, \eta) = \frac{\text{cov}(\eta_t, \eta)}{D(\eta_t)D(\eta)} = \frac{E(\eta_t \eta) - E(\eta_t)E(\eta)}{\sqrt{E(\eta_t^2) - E^2(\eta_t)} \sqrt{E(\eta^2) - E^2(\eta)}}, \text{ rezultă:}$$

$$(3.3.9) \quad \rho(\eta_t, \eta) = \frac{E(\eta_t \eta) - E(\eta_t)E(\eta)}{\sqrt{E(\eta_t^2) - E^2(\eta_t)} \sqrt{E(\eta^2) - E^2(\eta)}}$$

Pentru calculul timpului de propagare între punctele fictive unde se consideră că banda se descarcă în râu se apelează la metoda lui Rayleigh, constatând din practica curentă că timpul de propagare pe un râu între două puncte depinde de componenta tangențială pe direcția de curgere și distanța dintre puncte.

$$\begin{cases} \Delta t = T \\ \Delta x = L \\ g s_0 = L T^{-2} \end{cases}, \text{ rezultă conform teoremei lui Rayleigh următorul sistem:}$$

$$T = (L)^a (L T^{-2})^b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Delta t = K \sqrt{\frac{\Delta x}{g s_0}}$ , unde pentru K s-a stabilit experimental următoarele valori:

(%)	-1)	-5)	-10)	-15)	-20)	-25)	-30)	-35)
K	8	7,5	7,25	7,5	7,75	8	8,25	8,5

#### 4. Rezultate obtinute prin aplicarea modelului

##### 4.1. Parametrii si variabile ale modelului

Modelul propus este aplicat în subbazinul Ruja, subbazin ce are o altitudine medie de 660 m, o suprafață bazinală de 6,6 km<sup>2</sup>, cu o pantă medie de 40%, lungimea firului principal de 4,2 km, fir ce are o panta medie de 9,1% și face parte din bazinul hidrografic Moneasa Fig. 1.

Modelul de integrare a scurgerii pe versant se bazează pe rezolvarea următorului sistem de ecuații cu

derivate parțiale:  $\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial r} = SDS \\ q = \alpha h^m \end{cases}$  stabilit anterior, sistem în care intervin următoarele mărimi și parametrii :

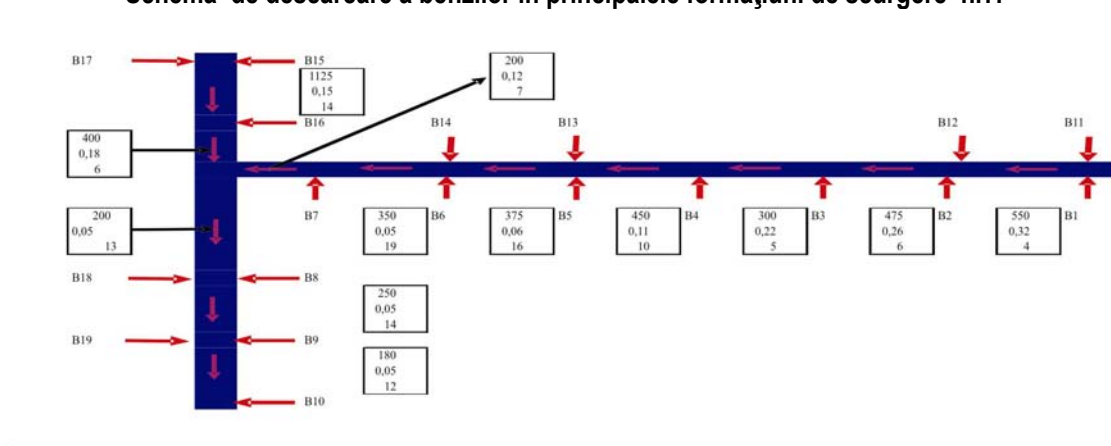
- ✓ R – lungimea benzii (m)
- ✓ b – lățimea benzii (m)
- ✓ S – suprafața benzii (m<sup>2</sup>)
- ✓ h - adâncimea apei pe versant (mm)
- ✓ q – debitul de la baza benzii pe unitatea de lățime (mc/s)
- ✓ m și α parametrii legați de geometria și rugozitatea versantului (adimensional)



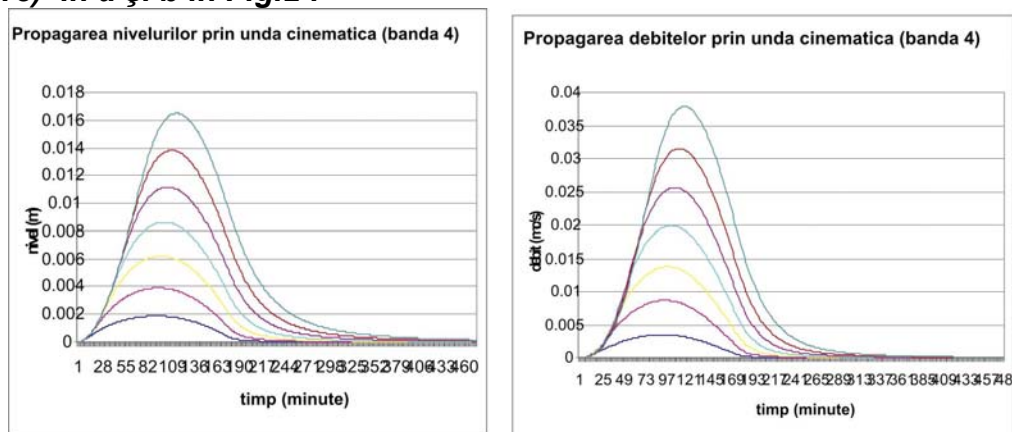
- ✓  $I_v$  – panta versantului (adimensional)
- ✓  $I_a$  – panta albiei (adimensional)
- ✓ SDS - este stratul disponibil pentru scurgere (mm)
- ✓  $i$  – intensitatea ploii (mm)
- ✓  $f$  – cantitate de apă ce se pierde prin infiltrație (mm)
- ✓  $n_v$  – rugozitatea versantului (adimensional)

$$\alpha(b_i) = \left( \frac{\sqrt{I_v}}{n_v} \right) (b_i), \text{ unde } b_i \text{ – numărul benzi în Fig. 1.}$$

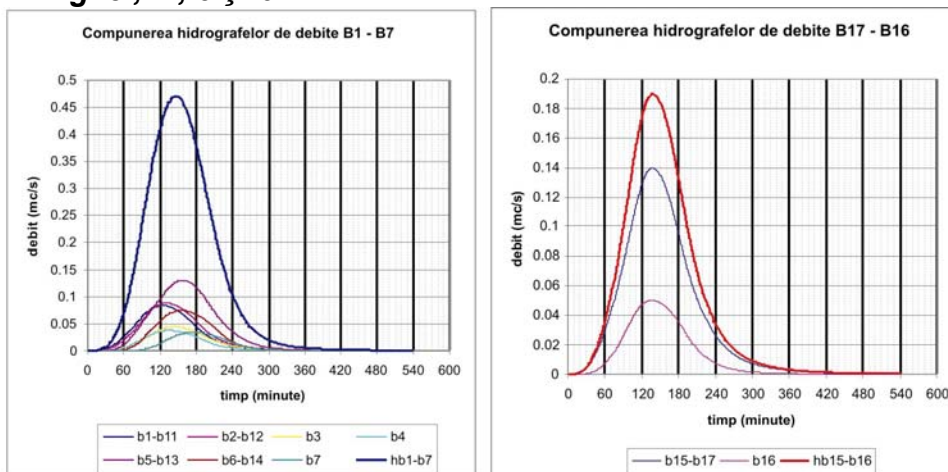
**Schema de descărcare a benzilor în principalele formațiuni de scurgere nr.1**



**Exemplu de propagare a undei cinematice pentru una din benzi (ploaie 47 mm în 3 ore) în a și b în Fig.2 :**



**4.1. Compunerea debitelor de descarcare a benzilor în firele de apă (ploaie 47 mm în 3 ore) în fig. 3 , 4 , 5 și 6**



**Fig. 3 compunerea undelor de viitură de B1-B7**

**Fig. 4 compunerea undelor de viitură de B17-B16**

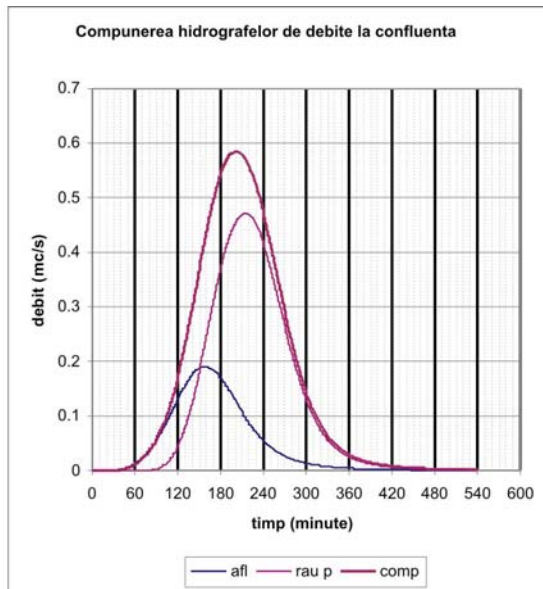


Fig. 5 compunerea undelor de viitură la confluență

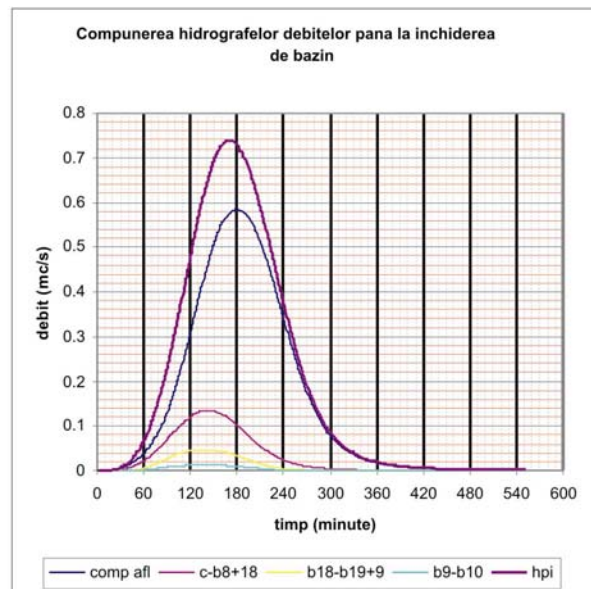


Fig. 6 compunerea undelor de viitură de la confluență la închiderea de bazin

## 5. Comparații ale rezultatelor modelului cu viituri produse în subbazinul Ruja în Fig.7

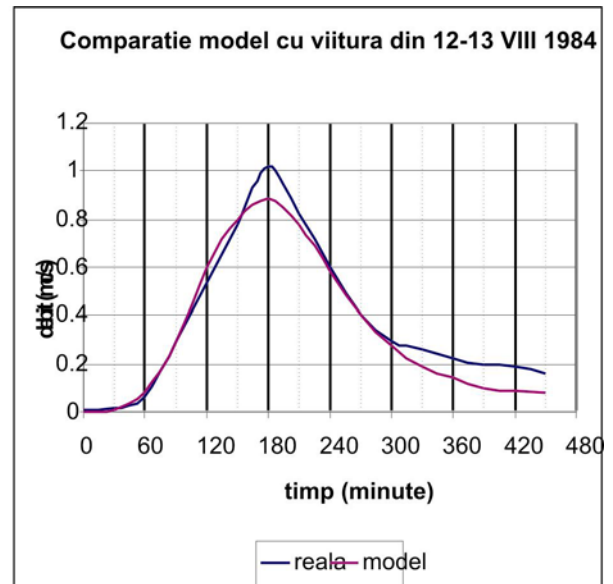
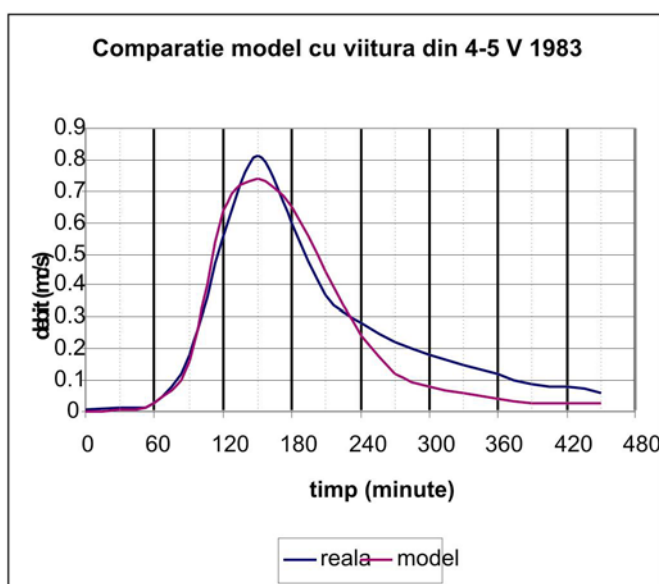


Fig. 7 Viituri in subbazinul Ruja a și b

## 6. Concluzii

- Metoda furnizează rezultate cu un grad de satisfacere mai bun decât compunerea unor unde cinematice mai complexe și prezintă rezultate mai bune decât modelele ce folosesc unda de difuzie.
- Aceasta metodă este aplicabilă în bazine hidrografice mici unde datele hidrologice sunt puține, dar are avantajul că poate da o dimensiune a scurgerii pentru acea zonă și se pot contura pe baza rezultatelor acestei metode unele lucrări de amenajare a torenților sau versanților.
- Cu toate că aparatul matematic folosit în realizarea acestei metode este laborios și incumbă în el un grad de dificultate, ecuația în diferențe finite a modelului este relativ simplă și nu necesită cunoștințe superioare în aplicare, în plus, modelul poate furniza pentru începători o viziune hidraulică asupra scurgerii pe versant.
- Printre premisele imediate ale modernizării și măririi performanței modelului este studiarea mai profundă a fenomenelor de infiltrație și realizarea unui model cu diferențe finite care să pornească de la fundamentele scurgerii în medii poroase, adică realizarea unei metode de calcul a lui SDS aplicând un model matematic de tip difuzie și după aceea sincronizarea acestuia cu cel de scurgere de suprafață.

- În fundamentarea acestui model am plecat de la principiul separării cauzelor și suprapunerea efectelor, cu toate că pare neconcordanț în a studia separat scurgerea de suprafață fără a lua riguros în considerare scurgerea subhipodermică sau mai bine zis scurgerea în mediu poros în vecinătatea suprafeței de scurgere, totuși este plauzibilă ideea ca separând aceste fenomene care sunt biunivoce și tratându-le separat prin a folosii ecuații cu derivate parțiale, de tip cinematic pentru scurgerea de suprafață și de tip difuzie pentru scurgerea în mediu poros, sincronizând fenomenele și suprapunând efectele pentru același interval de timp, modelul să aibă o performanță superioară. Pentru a se putea înțeleg formulele am pus forma extinsă și explicarea lor.

## Bibliografie

Caius Iacob, Introducere matematica în mecanica fluidelor, 1952, Ed. Academia R.P. Române  
 Hâncu, S., Platagea D., Hidrologie inginerescă , Ed. Ceres,  
 Ionescu, D. Gh., Isbasoiu, E. C., Ionita I. C., Mecanica fluidelor si masini hidraulice, Ed Tehnică,  
 Nicolescu, L.J. , Stoka M.I., Matematici pentru ingineri vol I + vol II, ed. Tehnica București  
 Pescaru I.V., Tigoiu V., 2002, Elemente de termodinamică și dinamica atmosferei, ed. Universității București  
 Stanciu P., Mișcarea apei pe versanți permeabili.  
 Stanciu P., Discuții și îndrumări practice în cadrul I.N.H.G.A  
 Șerban P., Stănescu V. Al., Roman P., 1989, Hidrologie Dinamica, Ed Tehnică,  
 Tihonov A.N., Smarski A.A., 1956, Ecuațiile fizici matematice, Ed. Tehnică